# ВАРИАНТИ®

## списание по математика

## СТУДЕНТИ

(теория)

Брой 1 – 2008 г.

Съдържание:





Фирма „Братя Лазарови” – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово” тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1” тел.: 879-40-49, офис „Лозенец” тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

# Линейна алгебра

## Детерминанти от трети и по-висок ред. Матрици. Видове матрици. Ранг на матрици. Обратна матрица.

Дефиниция на детерминанта, свойства. Пресмятане на детерминанти въз основа на свойствата , по правилото на Сарус и по правилото на триъгълника.

Под детирминантата $\Delta$ от $n^2$ елемента $a_{ik}$, където $i,k=1,2,3,....n$, разбираме сумата от $n!$ члена $\Sigma(-1)^{[i_1,i_2,...i_n]}\, a_{1i_{11}}a_{2i_2}....a_{ni_n}$, където $i_1,i_2,...,i_n$ са пермутациите на елементите $1,2,3,...,n;[i_1,i_2...,i_n]$. Детерминантата е броят на инверсиите в пермутацията $i_1,i_2,...i_n$, и я бележим с $\Delta=\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & .\,a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & .\,a_{2n} \\ . & . & . & .\;. \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & .\,a_{nn} \end{vmatrix}$ или, съкратено, $\Delta=|a_{ik}|, i,k=1,2,...,n.$

Детерминантата се получава от члена $a_{11}a_{22}a_{33}...a_{nn}$ като пермутираме вторите индекси по всевъзможни начини и получените членове вземаме със знак $+$, ако пермутацията от вторите индекси е четна, и със знака $-$, ако е нечетна. $\Delta$ се нарича детерминанта от $n$-ти ред. Елементите $a_{i1},a_{i2},...,a_{in}$ образуват $i$-тия хоризонтален ред, а $a_{1i},a_{2i},...,a_{ni}$ - $k$-тия вертикален ред или стълб. Общо хоризонталните и вертикалните редове или стълбове се наричат редове на детерминантата. Елементите $a_{11},a_{22},a_{33},...,a_{nn}$ образуват главният диагонал, а елементите $a_{n1},a_{n-1,2},a_{n-3,3},..,a_{1n}$ - второстепенният диагонал на детерминантата.
Пресмятането на стойността на детерминантата от трети ред може да стане по два начина:

Първи начин:
Правило на Сарус: вдясно от таблицата на елементите преписваме първия и втория стълб.

$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$. След това умножаваме елементите $a_{11},a_{22},a_{33}$ на главния диагонал, а също така и елементите на „успоредните му диагонали", като получените произведения вземаме със знаците им. След това умножаваме елементите $a_{13},a_{22},a_{31}$ на второстепения диагонал, а също така и елементите на „успоредните му диагонали", като получените произведения вземаме с обратния им знак. Алгебричният сбор $a_{11}a_{22}a_{33}+a_{12}a_{23}a_{31}+a_{13}a_{21}a_{32}-(a_{13}a_{22}a_{31}+a_{11}a_{23}a_{32}+a_{12}a_{21}a_{33})$ на шестте така получени произведения е стойността на детерминантата.

Пример:
Да се пресметнат детерминантите:

1. $\Delta = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -1 \end{vmatrix}$.

Решение:
$\Delta = 2(-1) - 5(-3) = 13$.

2. $\Delta = \begin{vmatrix} 1 & -4 & 2 \\ 3 & -1 & 5 \\ -2 & 0 & -3 \end{vmatrix}$;

Решение:
Прилагаме правилото на Сарус.

$$\Delta = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -4 & 2 & 1 & -4 \\ 3 & -1 & 5 & 3 & -1 \\ -2 & 0 & -3 & -2 & 0 \end{array}\right.$$

$$= 1(-1)(-3) + (-4).5(-2) + 2.3.0 - 2(-1)(-2) - 1.5.0 - (-4).3.(-3) = 3 + 40 + 0 - 4 - 0 - 36 = 3$$

<u>Правило на триъгълника</u> – умножаваме елементите по главния диагонал и към тях прибавяме произведенията от елементите, разположени по върховете на триъгълници, една от страните на които е успоредна на главния диагонал (върховете на всеки от тези триъгълници са елементи от различни редове и стълбове). От така полученият сбор от три произведения изваждаме сбора на произведенията от елементите разположени по второстепения диагонал и тези разположени по върховете на триъгълниците със страни, успоредни на второстепения диагонал.
Пример:
Пресметнете детерминантата по правилото на триъгълника.

1. $\Delta = \begin{vmatrix} -1 & -2 & 1 \\ -4 & -5 & 2 \\ -7 & -10 & 3 \end{vmatrix}$

Решение:

$$(-1)(-5).3 + (-2).2(-7) + 1(-4)(-10) - (-7)(-5).1 - (-4)(-2).3 - (-10).2.(-1) =$$
$$= 15 + 28 + 40 - 35 - 24 - 20 = 83 - 79 = 4.$$

<u>Свойства на детерминантите:</u>
1. Детерминантата не се променя при разменяне на редовете със съответните стълбове.
Следствие: Всяко твърдение вярно за редовете на една детерминанта е вярно и за стълбовете и обратно.
2. Ако се разменят два реда помежду им, детерминантата се променя само по знак.
3. Детерминантата с два равни реда е равна на нула.
4. Общият множител на всички елементи от даден ред може да се изнесе като множител пред знака на детерминантата.
5. Ако всички елементи на един ред са нули, то детерминантата е равна на нула.
6. Детерминанта с два пропорционални реда е равна на нула.

7. Ако елементите на $i$ - тия ред на $\Delta$ са суми от две събираеми, то тя е равна на сума от две детерминанти, в които всички редове освен $i$ - тия са същите както в дадената, $i$ - тия ред в първата се състои от първите събираеми, а в другата- от вторите.
8. Детерминантата не се променя, ако към елементите на един ред се прибавят елементите на друг ред, умножен с едно и също число.
9. Ако един ред на $\Delta$ е линейна комбинация на останалите редове, детерминантата е равна на нула.

<u>$n$ -мерно векторно пространство.</u>

Под $n$ - мерен вектор разбираме наредена система от $n$ -числа $\vec{x} = (x_1, x_2, ....., x_n)$, където $x_1, x_2, ...., x_n$ наричаме координати на $n$-мерния вектор $\vec{x}$. Казваме, че векторите $\vec{x} = (x_1, x_2, ...x_n)$ и $\vec{y} = (y_1, y_2, ...., y_n)$ са равни, ако $x_i = y_i, i = 1,2,3,...n$. Под произведение на вектора $\vec{x}$ с число $\alpha$ разбираме вектора $\alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, ..., \alpha x_n)$. Под сума на векторите $\vec{x}$ и $\vec{y}$ разбираме вектора $\vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, ..., x_n + y_n)$. Под $n$ -мерно векторно пространство разбираме множеството от всички $n$ -мерни вектори с така дефинираните равенства на два вектора, произведение на вектор с число и сума на два вектора. Ако имаме една матрица $A = \|a_{ij}\|, (i = 1,2,...m); j = 1,2,...m.$, то всеки ред на матрицата може да бъде разглеждан като $n$ -мерен вектор, а всеки стълб е $m$ -мерен вектор. Векторите $\vec{x}, \vec{y}, .. \vec{z}$ са линейно зависими, ако съществуват числа $\alpha, \beta, ... \gamma$, поне едно от които е различно от нула, такива, че $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + .... + \gamma\vec{z} = 0$. Векторите $\vec{x}, \vec{y}, ..., \vec{z}$ са линейно-независими, ако линейната комбинация $\alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + .... \gamma\vec{z} = 0$ е възможна само при $\alpha = \beta = .... = \gamma = 0$. Векторът $u$ е линейна комбинация на векторите $\vec{x}, \vec{y}, ...., \vec{z}$, ако съществуват числа $\alpha, \beta, ..., \gamma$, такива, че $\vec{u} = \alpha\vec{x} + \beta\vec{y} + .... + \gamma\vec{z}$.
Съществуват следните твърдения за линейна зависимост на векторите:

1. Необходимото и достатъчно условие векторите $\vec{x}, \vec{y}, ... \vec{z}$ да са линейно-зависими е един от тях да е линейна комбинация на останалите.
2. Ако измежду елементите на $\vec{x}, \vec{y}, ...... \vec{z}$ има нулев елемент, те образуват линейно-зависима система.
3. Ако част от системата $\vec{x}, \vec{y}, ..... \vec{z}$ е линейно-зависима, то цялата система е линейно зависима.

Казваме, че линейно-независимите елементи $e_1, e_2, .....e_n$ образуват базис за едно линейно пространство, ако за всеки елемент $\vec{x}$ съществуват числа $x_1, x_2, ....., x_n$, така че $\vec{x} = x_1e_1 + x_2e_2 + .... + x_ne_n$.

Ранг на матрица.

Максималният брой линейно независими редове в една матрица се нарича ранг на матрицата. Ако матрицата $A$ има поне един минор от $r$-ти ред, различен от нула и всички минори от ред $r+1$ са нули, то рангът на матрицата $A$ е равен на $r$. Рангът на матрицата $A$ ще означаваме с $r(A)$ или с $rangA$. Елементарните преобразувания над дадена матрица не изменят нейния ранг.

Методи за пресмятане ранга на матрица.

Метод на обхващащите минори. Същността на метода се състои в следното: намира се минор на матрицата $M$ от ред $s$, различен от нула. След това се пресмятат всички минори от ред $s+1$, които обхващат минора $M$, и ако те са нули, рангът на матрицата е $s$. Ако поне един обхващащ минор от ред $s+1$ е различен от нула, продължаваме по същата процедура, т.е. пресмятаме всички минори от ред $s+2$, които обхващат минора $M$. И така след пресмятане на краен брой минори определяме ранга на матрицата.

Пример:

Да се определи рангът на матрицата $A=\begin{Vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 3 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & -4 & 5 \end{Vmatrix}$ по метода на обхващащите минори.

Решение.

Избираме един минор от втори ред различен от нула, т.е. $M_2=\begin{vmatrix} -4 & 3 \\ -2 & 1 \end{vmatrix}=(-4).1-(-2).3=2\neq 0$. Следователно $r(A)$ е поне $2$. Минорът от трети ред $M_3=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 \\ 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}$, който обхваща отличния от нула минор от втори ред, е също различен от нула. Или $r(A)$ е поне $3$. Образуваме минора от четвърти ред $M_4$, който обхваща минора от трети ред. $M_4=\begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 3 \\ 4 & -7 & 4 & -4 \end{vmatrix}$; Пресмятаме $M_4$ по формулата за пресмятане на детерминанти от по-висок ред, а именно $\Delta=(-1)^{i+j}a_{ij}.D_{ij}$. Нулираме елементите на първия стълб - като умножим елементите на втория ред с $(-2)$ и ги съберем със съответните елементи на първия ред.Умножаваме елементите на втория ред с $(-4)$ и ги събираме със съответните елементи на четвъртият ред, т.е.

$M_4=(-1)^{2+1}.1.\begin{vmatrix} 0 & 1 & 9 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 0 & 12 \end{vmatrix}$; Пресмятаме получената детерминанта от трети ред по същият начин, като нулираме елементите на първия стълб. Умножаваме елементите на



Фирма „Братя Лазарови" – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово" тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1" тел.: 879-40-49, офис „Лозенец" тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

втория ред с $(-1)$ и ги събираме със съответните елементи на третия ред. $M_4 = (-1).(-1)^{2+1}.1.\begin{vmatrix} 1 & 9 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} = 0$. Проверяваме и последният минор от четвърти ред $M_4^{'}$ - дали е равен на нула. Ако е равен на нула, то $r(A) = 3$, а ако е различен от нула, то $r(A) = 4$.. $M_4^{'} = \begin{vmatrix} 2 & -4 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 4 & -7 & 4 & 5 \end{vmatrix} = 0$. Следователно $r(A) = 3$.

<u>Метод на привеждане на матрицата в триъгълен вид.</u>

С помощта на елементарните преобразувания преобразумаве дадената матрица във вид, в който елементите от главния диагонал са само нули и еденици, а всички елементи под диагонала са нули. Рангът на матрицата е равен на броя на едениците в главния диагонал на преобразуваната матрица.

Пример.

Да се определи рангът на матрицата $A = \begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 5 & -8 & -5 & -12 \\ 3 & -7 & 8 & 9 & 13 \end{Vmatrix}$, като се приведе в триъгълен вид.

Решение.

Умножаваме първия ред с $(-2)$ и го прибавяме към втория и третия, първия ред умножаваме с $(-1)$ и го прибавяме към четвъртия и към петия ред; прибавяме първия ред, умножен с $(-3)$. По този начин получаваме матрицата:

$\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & -8 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. След това извършваме транспозиция на втория и третия ред: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 3 & -5 & -4 & 8 \\ 0 & 6 & -10 & -8 & -16 \\ 0 & -4 & 2 & 0 & 1 \end{Vmatrix}$. Сега умножаваме втория ред с $(-3)$ и го прибавяме към третия, втория ред с $(-6)$ и го прибавяме към четвъртия, умножаваме втория ред с $(4)$



Фирма „Братя Лазарови" – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово" тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1" тел.: 879-40-49, офис „Лозенец" тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

и го прибавяме към петия. Получаваме $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 0 & -28 & -32 & 58 \\ 0 & 0 & 14 & 16 & 29 \end{Vmatrix}$. Умножаваме третия ред с $(-2)$ и го прибавяме към четвъртия и към петия; получаваме матрицата: $\begin{Vmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 4 & 7 \\ 0 & 0 & -14 & -16 & -29 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$, която има същия ранг като матрицата $A$. Следователно $r(A) = 3$.

Обратна матрица.

Всяка квадратна матрица $A = \|a_{ij}\|$ от $n$-ти ред притежава единствена матрица $A^{-1}$ от същия ред със следното свойство: $A.A^{-1} = E$, където $E$ е единична матрица от $n$-ти ред. Матрицата $A^{-1}$ се нарича обратна на $A$. Получава се по формулата $A^{-1} = \frac{1}{\det A}\begin{vmatrix} A_{11} & A_{21} & . & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & . & A_{n2} \\ . & . & . & . \\ A_{1n} & A_{2n} & . & A_{nn} \end{vmatrix}$, където $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$ са адюнгираните количества на елементите $a_{ij}$ на $\det A$.

Примери:

1. Намерете обратната матрица $A^{-1}$ на матрицата $A = \begin{Vmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -3 \end{Vmatrix}$.

Решение:

Най-напред пресмятаме $DetA = 10 \neq 0$, защото ако $DetA = 0$, матрицата $A$ няма обратна матрица. Пресмятаме адюнгираните количества $A_{ij}$ по формулата $A_{ij} = (-1)^{i+j}.D_{ij}$, т.е. $A_{11} = \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = -5$; $A_{12} = -\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = 8$; $A_{13} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 9$; $A_{21} = -\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & -3 \end{vmatrix} = 10$; $A_{22} = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10$; $A_{23} = -\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = -10$; $A_{31} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 5$; $A_{32} = -\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{vmatrix} = -4$; $A_{33} = \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -7$. Следователно $A^{-1} = \frac{1}{10}\begin{Vmatrix} -5 & 10 & 5 \\ 8 & -10 & -4 \\ 9 & -10 & -7 \end{Vmatrix}$.

2. Намерете обратната матрица $A^{-1}$ на матрицата $A=\begin{Vmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 \\ 4 & 2 & -1 & -6 \end{Vmatrix}$.

Решение:
Обратната матрица ще намерим по

<u>Метода на Гаус-Жордан.</u>

Образува се разширена матрица от $A$ и $E$.
Първи етап:
Първият ред се нарича водещ ред, първият стълб-водещ стълб, общият им елемент-водещо число.Целта е, чрез елементарни преобразувания да се получи първият стълб на еденичната матрица. Водещият ред се дели на водещото число. Полученото частно се нарича главен ред и се записва като първи ред на втората разширена матрица. В случая главния ред съвпада с водещия ред, защото водещото число $a_{11}=1$. Останалите елементи от първия стълб на втората разширена матрица се получават като главният ред се умножава с $(-2);(-3)$ и $(-4)$ и се прибавя съответно към втори, трети и четвърти ред на първата разширена матрица.

$$\|A/E\|=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 3 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 1 & -2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & -1 & -6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & -2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -2 & -5 & -3 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -6 & -5 & -10 & -4 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right\|.$$

Втори етап:
Водещ ред е втори ред, водещ стълб – втория стълб на втората разширена матрица. Водещото число е $(-1)$. Дели се втория ред на $(-1)$ и се получава главният ред на третата разширена матрица. Преобразуванията продължават докато на мястото на $A$ се получи $E$.

$$\|A/E\|=\left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 & -5 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & -1 & -3 & -3 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 7 & -5 & 1 & 0 \end{array}\right\| \sim$$

$$\sim \left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 5 & -4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 8 & -6 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -17 & 13 & 1 & -3 \end{array}\right\| \sim \left\|\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 22 & -17 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -6 & 5 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & -26 & 20 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 17 & -13 & -1 & 3 \end{array}\right\|.$$

Следователно $A^{-1}=\begin{Vmatrix} 22 & -17 & -1 & 4 \\ -6 & 5 & 0 & -1 \\ -26 & 20 & 2 & -5 \\ 17 & -13 & -1 & 3 \end{Vmatrix}$.

*Сваляйте безплатно новите броеве на списание „ВАРИАНТИ” на адрес:*
*http://www.lazarovi.com/online-baza/*
*Успех!*

*Уважаеми читатели, съдържанието на това списание е съобразено с програмата на МОН, но главната му цел е да подпомогне обучението на учениците на фирма „Братя Лазарови”. Фирмата има специализирана методика на преподаване, която включва материал по математика с повишена трудност, който се изучава в следващия клас в училище.*