ВАРИАНТИ®

списание по математика

СТУДЕНТИ

Брой 3 – 2008 г.

Съдържание:

Фирма „Братя Лазарови” – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово” тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1” тел.: 879-40-49, офис „Лозенец” тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

Линейна алгебра

Системи линейни уравнения - теоретична част

I. Нехомогенни системи линейни уравнения:

Съвкупност от линейни връзки $\left|\begin{array}{l} a_{11}.x_1 + a_{12}.x_2 + ...+ a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}.x_2 + ...+ a_{2n}x_n = b_2 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ...a_{mn}x_n = b_m \end{array}\right.$ се нарича ЛИНЕЙНА СИСТЕМА от m уравнения с n неизвестни $x_1, x_2, ..., x_n$. Числата a_{ij} и $b_1, b_2, ..., b_m$ се наричат съответно коефициенти на системата и свободни членове(неизвестни).

Една линейна система може да се запише и във вида:

$$\left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}..... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}..... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & a_{mn} \end{array}\right\| . \left\|\begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ . \\ x_n \end{array}\right\| = \left\|\begin{array}{c} b_1 \\ b_2 \\ . \\ b_m \end{array}\right\|$$

или $A.X = B$ наречен МАТРИЧЕН ЗАПИС на системата, където A е матрицата от коефициентите a_{ij}, X - матрица стълб на неизвестните x_i и B - матрица стълб на свободните членове b_j.

Ако B е нулева матрица стълб, системата се нарича ХОМОГЕННА, в противен случай-НЕХОМОГЕННА.

Всяка наредена n-торка от числа $(x_1, x_2, ...x_n)$ която удовлетворява уравненията на системата, се нарича решение.

Една система линейни уравнения се нарича Съвместима, ако има поне едно решение, и несъвместима, ако няма решение. Съвместимата система се нарича ОПРЕДЕЛЕНА, ако има единствено решение и НЕОПРЕДЕЛЕНА, ако има повече от едно решение.Неопределената система има безброй много решения.

Да решим една система, означава да намерим всички нейни решения.

Матрицата, получена от матрицата на системата A, към която сме прибавили матрицата стълб B (от свободните членове), като последен стълб, се нарича РАЗШИРЕНА матрица на системата и се означава с A_0.

$$A = \left\|\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13}............ & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}....... & a_{2n} \\ .... & .... & .... & .... \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3}....... & a_{mn} \end{array}\right\| ; \quad A_0 = \left\|\begin{array}{cccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13}... & . & a_{1n} & & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23}... & ...... & a_{2n} & & b_2 \\ .... & .... & .... & ...... & .... & & . \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3....} & .... & .a_{mn}.... & & b_n \end{array}\right\| .$$

Теорема на РУШЕ: Необходимото и достатъчно условие системата $A.X = B$ да има решение е $r(A) = r(A_0)$. Ако рангът на A и A_0 е r, то r от неизвестните на системата могат да се изразят чрез останалите $(n - r)$ неизвестни (свободни неизвестни).

Нехомогенните системи се решават:

I. СЛУЧАЙ, когато $m = n$ (броят на уравненията е равен на броя на неизвестните).
1. По формулите на Крамер. Нека $\det A \neq 0$ тогава решението се получава по формулите: $x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta}; x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta}, ...x_n = \frac{\Delta_n}{\Delta}$, където $\Delta = \det A$, а Δ_i са получени от Δ след заместване на i - тия стълб на детерминантата Δ с свободните неизвестни.

а) При $\Delta = \det A \neq 0$ системата има единствено решение.

б) Ако $\forall \Delta_i \neq 0$ системата има единствено ненулево решение.

в) Ако $\forall_i, \Delta_i = 0$ системата има нулево (тривиално) решение.

г) При $\Delta = \det A = 0$, формулите на Крамер не са в сила.

д) Ако $\exists \Delta_i \neq 0$, системата няма решение.

е) Ако $\forall_i, \Delta_i = 0$, системата е неопределена и всяка наредена n - торка от числа е нейно решение.

2. Решаване на сестемата като матрично уравнение от вида $AX = B, (\det A \neq 0)$.
3. Метод на Гаус (метод на последователното изключване на неизвестните). Същността на метода е с елементарни преобразувания да получим система, еквевалентна на дадената в по прост вид, като последователно изключим неизвестните. Преобразуваме разширената матрица на системата, както при определяне ранг на матрица. С тези преобразувания системата се трансформира в еквивалентна система в триъгълен вид и от последното уравнение (ако има решение) определяме едно от неизвестните и чрез последователно заместване определяме останалите неизвестни.
II. СЛУЧАЙ, когато $m \neq n$. Системата се решава по метода на Гаус.

ПРИМЕРИ:
1. Да се реши с формулите на Крамер системата:

$$\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 - 5x_3 + x_4 = 8 \\ x_1 - 3x_2 - 6x_4 = 9 \\ 2x_2 - x_3 + 2x_4 = -5 \\ x_1 + 4x_2 - 7x_3 + 6x_4 = 0 \end{array} \right.$$

. Решение: Детерминантата на системата е:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 1 \\ 1 & -3 & 0 & -6 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 1 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 27 \neq 0$$, т.е.можем да приложим формулите на Крамер.

Фирма „Братя Лазарови" – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово" тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1" тел.: 879-40-49, офис „Лозенец" тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

Пресмятаме $\Delta_{i,} = 1,2,3,4$. $\Delta_1 = \begin{vmatrix} 8 & 1 & -5 & 1 \\ 9 & -3 & 0 & -6 \\ -5 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 4 & -7 & 6 \end{vmatrix} = 81 \Rightarrow x_1 = \dfrac{\Delta_1}{\Delta} = \dfrac{81}{27} = 3$;

$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 2 & 8 & -5 & 1 \\ 1 & 9 & 0 & -6 \\ 0 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & -7 & 6 \end{vmatrix} = -108 \Rightarrow x_2 = \dfrac{\Delta_2}{\Delta} = -\dfrac{108}{27} = -4$;

$\Delta_3 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 8 & 1 \\ 1 & -3 & 9 & -6 \\ 0 & 2 & -5 & 2 \\ 1 & 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = -27 \Rightarrow x_3 = \dfrac{\Delta_3}{\Delta} = -\dfrac{27}{27} = -1$;

$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -5 & 8 \\ 1 & -3 & 0 & 9 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \\ 1 & 4 & -7 & 0 \end{vmatrix} = 27 \Rightarrow x_4 = \dfrac{\Delta_4}{\Delta} = \dfrac{27}{27} = 1$; Решения на системата са:

$x_1 = 3; x_2 = -4; x_3 = -1; x_4 = 1$.

2. Да се реши по матричния метод системата: $\left| \begin{array}{l} 2x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ 5x_1 + x_2 + 3x_3 = 14 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 5 \end{array} \right.$;

Решение: Детерминантата на системата е: $\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -3 \neq 0$. Тогава следва

верността на матричното равенство:

$$\begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} = \left[\begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 5 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}\right]^{-1} . \begin{Vmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{Vmatrix} -1 & -1 & -2 \\ -4 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 \\ 14 \\ 5 \end{Vmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{Vmatrix} 6 \\ 15 \\ 9 \end{Vmatrix} \Rightarrow \begin{Vmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{Vmatrix} . \begin{Vmatrix} 2 \\ -5 \\ 3 \end{Vmatrix} \Leftrightarrow$$

$x_1 = 2; x_2 = -5; x_3 = 3.$

3. По метода на Гаус да се реши системата: $\left|\begin{array}{l}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3\\3x_1+5x_2+3x_3+2x_4=-6\\6x_1+8x_2+x_3+5x_4=-8\\3x_1+5x_2+3x_3+7x_4=-8\end{array}\right.$.

Решение: образуваме разширената матрица на системата A_0. С помощта на тъждествени преобразувания, запазващи ранга, ще приведем матрицата A_0 в триъгълен вид.

$A_0=\left\|\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&-3\\3&5&3&5&-6\\6&8&1&5&-8\\3&5&3&7&-8\end{array}\right\|$. Умножаваме първият ред на матрицата A_0 с $(-1);(-2)$ и получените произведения, прибавяме съответно към второияр четвъртия и третия ред.

Получаваме еквивалентната матрица: $\left\|\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&-3\\0&1&2&3&-3\\0&0&-1&1&-2\\0&1&2&5&-5\end{array}\right\|$ на която умножаваме втория ред с (-1) и получените произведения, прибавяме към четвъртия ред. Така получаваме матрицата A_0 в триъгълен вид: $A_0=\left\|\begin{array}{cccc|c}3&4&1&2&-3\\0&1&2&3&-3\\0&0&-1&1&-2\\0&0&0&2&-2\end{array}\right\|$.

От получения вид на разширената матрица следва, че първоначалната система е еквивалентна на системата:

$\left|\begin{array}{l}3x_1+4x_2+x_3+2x_4=-3\\x_2+2x_3+3x_4=-3\\-x_3+x_4=-2\\2x_4=-2\end{array}\right.$. От четвъртото уравнение намираме $x_4=-1$, а от третото, като заместим с $x_4=-1$, получаваме $x_3=1$. От второто след заместване с $x_3=1$ и $x_4=-1$, получаваме $x_2=-2$ и накрая от първото уравнение получаваме $x_1=2$.

Ако продължим преобразуването на разширената матрица до получаването на еденичната матрица на нейното място, то това ще изглежда така:

$$A_0 = \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & -2 \end{array} \right\| \sim \begin{array}{c} \\ \\ \\ (-2);(1) \end{array}$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 4 & 0 & 3 & -5 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & 7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| (-4) \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & -17 & 23 \\ 0 & 1 & 0 & 5 & -7 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \begin{array}{c} \\ \\ \\ (17);(-5);(-1) \end{array} \sim$$

$$\sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 3 & 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \sim \left\| \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 \end{array} \right\| \text{, т. е. } \left\| \begin{array}{c} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{array} \right\| = \left\| \begin{array}{c} 2 \\ -2 \\ 1 \\ -1 \end{array} \right\| .$$

II. ХОМОГЕННИ СИСТЕМИ.

Общият вид на хомогенна линейна система уравнения е:

$$\left| \begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_2 + a_{22}x_2 + ... + a_{2m}x_n = 0 \\ .... \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + ... + a_{mn}x_n = 0 \end{array} \right. .$$

За всяка хомогенна система линейни уравнения е в сила $r(A) = r(A_0)$, където A е матрицата на системата, A_0 е нейната разширена матрица.
Всяка хомогенна линейна система уравнения има за решение НУЛЕВОТО (ТРИВИАЛНО) решение $(x_1 = x_2 = ... = x_n = 0)$.
Ако $r(A) = r(A_0) < n$, системата има безброй много решения.
Ако $r(A) = n$, системата има безброй много решения, тогава и само тогава, когато $\Delta = \det A = 0$.
Всяко множество от линейно независими решения на системата се нарича ФУНДАМЕНТАЛНА СИСТЕМА РЕШЕНИЯ.
Една фундаментална система решения може да се получи, като на свободните неизвестни се дава последователно стойности, образуващи еденична матрица.
Хомогенните системи линейни уравнения се решават като нехомогенните.

Системи линейни уравнения - задачи

1. Решете системата $\begin{vmatrix} 3x_1 + 2x_2 + x_3 = 5 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 1 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 = 11 \end{vmatrix}$, чрез формулите на Крамер.

2. Решете системата от задача №1, по матричният метод.

3. Решете системата $\begin{vmatrix} -x_1 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 5x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 3 \\ 9x_1 + x_2 - 11x_3 = 0 \\ x_1 + 3x_2 - 13x_3 = -6 \end{vmatrix}$, по метода на Гаус.

4. Решете системата $\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 + 5x_3 = -6 \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 = 3 \end{vmatrix}$;

5. Да се изследва за коя стойност на λ системата $\begin{vmatrix} 2x_1 - x_2 + x_3 + x_4 = 1 \\ x_1 + 2x_2 - x_3 + 4x_4 = 2 \\ x_1 + 7x_2 - 4x_3 + 11x_4 = \lambda \end{vmatrix}$ има решение.

6. Решете системата $\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{vmatrix}$;

7. Решете системата $\begin{vmatrix} 3x_1 + 5x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 7x_2 + 5x_3 = 0 \\ x_1 + x_2 - 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + 9x_2 + 6x_3 = 0 \end{vmatrix}$;

8. Решете системата $\begin{vmatrix} 3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + 3x_2 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 = 0 \end{vmatrix}$;

9. Намерете общото решение и фундаменталната система от решения на системата:

$$\begin{vmatrix} x_1 + 2x_2 + 4x_3 - 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 5x_2 + 6x_3 - 4x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 - 2x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 + 8x_2 + 24x_3 - 19x_4 = 0 \end{vmatrix};$$

10. Решете системата $\left| \begin{array}{l} x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 = 4 \\ x_2 - x_3 + x_4 = -3 \\ x_1 + 3x_2 - 3x_4 = 1 \\ -7x_2 + 3x_3 + x_4 = -3 \end{array} \right.$;

отговорите са на следващата страница...

Фирма „Братя Лазарови" – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово" тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1" тел.: 879-40-49, офис „Лозенец" тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

Отговори на теста по линейна алгебра:

1.и 2. $x_1 = 2; x_2 = -2; x_3 = 3$;

3. $x_1 = 1; x_2 = 2; x_3 = 1$;

4. $x_1 = 1; x_2 = 1; x_3 = -1$;

5. Ако $\lambda = 5$ - безброй решения,т.е. $x_1 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x_3 - \frac{6}{5}x_4; x_2 = \frac{3}{5} + \frac{3}{5}x_3 - \frac{7}{5}x_4$; Ако $\lambda \neq 5$ - няма решение. При $\lambda = 0$ системата е несъвместима. При $\lambda \neq 0$

$x = \frac{4-\lambda}{5\lambda} - \frac{3}{5}x_3; x_2 = \frac{9\lambda - 16}{5\lambda} - \frac{8}{3}x_3; x_4 = \frac{1}{\lambda}$;

6. $x_1 = 8x_3 - 7x_4; x_2 = -6x_3 + 5x_4$;

7. $x_1 = x_2 = x_3 = 0$;

8. $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 0$;

9. $x_1 = 8x_3 - 7x_4; x_2 = -6x_3 + 5x_4$;

10. $x_1 = -8; \mathrm{x}_2 = -3; x_3 = 6; x_4 = 0$.

тест „Аналитична геометрия” на следващата страница...

Аналитична геометрия

Аналитична геометрия в равнината.

1.Напишете уравненията на страните на ΔABC с върхове $A(-1;1), B(-3;5), C(7;11)$ и намерете вътрешните му ъгли.
2.Върховете на един триъгълник са $A(5;-7), B(1;11) C(-4,13)$. Напишете уравненията на медианите му.
3.Да се напише уравнение на права, която минава през точка $A(2;1)$ и сключва с положителната посока на абсцисната ос ъгъл два пъти по-голям от този, който сключва права $x-3y-4=0$ със същата ос.
4. Да се намери права която е успоредна на правата $3x-4y-10=0$ и е на разстояние 3 еденици от нея.
5. Да се напише права успоредна на правите $g_1: 4x-6y-3=0$ и $g_2: 2x-3y+7=0$ и е на равни разстояния от тях.
6. Да се намери права, минаваща през точка $A(2;-3)$ и успоредна на правата, определена от точките $M_1(1;2)$ и $M_2(-1;-5)$.
7. Да се намери права, която минава през точката $A(1;2)$ и е перпендикулярна на правата, определена от двете точки $M_1(4;3)$ и $M_2(-2;1)$.
8. Да се намери права, която е симетрична на правата $g: 9x+y-30$ относно правата $p: 5x-4y-1=0$.
9. Лъч минава през точката $A(2;3)$, отразява се от правата $g: x+y+1=0$ и минава през точката $B(1;1)$. Напишете уравненията на падащия и отразения лъч.
10. Правите $g_1: 3x+4y-12=0$ и $g_2: x-y-1=0$ са ъглополовящи на вътрешните ъгли на триъгълник с връх $M_1(2;5)$. Да се намерят уравненията на страните на триъгълника.

отговорите са на следващата страница...

Отговори на теста по аналитична геометрия:

1. $3x+y+4=0; 3x-5y+34=0; 3x-2y+11=0$;
2. $11x+7y-47=0; 38x+13y-99=0; 16x-y-5=0$;
3. $g: 3x-4y+10=0$;
4. $3x-4y-25=0; 3x-4y+5=0$;
5. $g: 8x-12y+11=0$;
6. $g: 7x-2y-20=0$;
7. $g: 3x+y-5=0$;
8. $g: x-9y+24=0$;
9. $l_1: 5x-4y+2=0; l_2: 4x-5y+1=0$;
10. $3x-46y+28=0; 9x+2y-28=0; 46x-3y-77=0$.

„Аналитична геометрия" – „интегриране чрез заместване"
на следващата страница...

Анализ I част

Неопределени интеграли $\int f(x)dx$.

Интегриране чрез заместване (субституция) – теоретична част

Нека решим интеграла $\int f(x)dx$. Не можем да го решим непосредствено, но е известно, че той съществува. Можем да сменим променливата x в подинтегралния израз на дадения интеграл, като заместим (като направим субституцията) $x=\varphi(t)$, където $\varphi(t)$ е непрекъсната функция с непрекъсната производна и $\varphi(t)$ има обратна функция. Имаики предвид, че $dx=\varphi'(t)dt$ то при направените предположения за $\varphi(t)$, като заместим x и dx в интеграла получаваме $\int f(x)dx=\int f[\varphi(t)]\varphi'(t)dt$. След решаване на интеграла в дясната част се връщаме към старата променлива x, като в отговора t заместваме с неговото равно определено от $x=\varphi(t)$.
Чрез подходяща субституция $x=\varphi(t)$ дадения интеграл се преобразува в друг, решението на който е по-просто.
Методът на субституциите е един от основните и най-силни методи за решаване на неопределени интеграли.
ПРИМЕРИ:

1. $J=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx$. Решение: Използваме субституцията $\ln x=t$, от която определяме, че $x=e^t$ и $dx=e^t dt$. Или

$$J=\int\frac{\sqrt{1+\ln x}}{x}dx=\int\frac{\sqrt{1+t}}{e^t}e^t dt=\int(1+t)^{\frac{1}{2}}d(1+t)=\frac{(1+t)^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}}+C=\frac{2}{3}(1+t)\sqrt{1+t}+C\Rightarrow$$

$$\Rightarrow J=\frac{3}{2}(1+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C.$$

2. $J=\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$.

Решение: Използваме субституцията $t=\sqrt{x}\Rightarrow x=t^2;dx=2tdt$. Тогава

$$\int\frac{\sin\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx=\int\frac{\sin t}{t}2tdt=2\int\sin tdt=-2\cos t+C\Rightarrow J=-2\cos\sqrt{x}+C.$$

3. $J=\int x\sqrt{a-x}dx$.

Решение: Чрез субституцията $t=\sqrt{a-x}$, а от там

$$a-x=t^2;x=a-t^2;dx=-2tdt\Rightarrow J=\int\left(a-t^2\right)t(-2t)dt=2\int\left(t^4-at^2\right)dt=$$

$$=2\int t^4dt-2a\int t^2dt=\frac{2}{5}t^5-\frac{2a}{3}t^3+C=\frac{2}{5}\left(\sqrt{a-x}\right)^5-\frac{2a}{3}\left(\sqrt{a-x}\right)^3+C.$$

Фирма „Братя Лазарови” – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово” тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1” тел.: 879-40-49, офис „Лозенец” тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

4. $J=\int\sqrt{a^2-x^2}\,dx$.

Решение: Използваме субституцията

$x=a\sin t; dx=a\cos t\mathrm{dt}\Rightarrow \mathrm{J}=\int\sqrt{\mathrm{a}^2-a^2\sin^2 t}.a\cos tdt=a\int\sqrt{a^2\left(1-\sin^2 t\right)}\cos tdt=$

$=a^2\int\sqrt{\cos^2 t}\cos tdt=a^2\int\cos^2 tdt.$

$$\cos^2 t=\frac{1+\cos 2t}{2}\Rightarrow J=a^2\int\frac{1+\cos 2t}{2}dt=\frac{a^2}{2}\int(1+\cos 2t)dt$$

Тъй като $=\frac{a^2}{2}\int dt+\frac{a^2}{2}\int\cos 2tdt=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{2}.\frac{1}{2}\int\cos 2td(2t)=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}\sin 2t+C=$

$$=\frac{a^2}{2}t+\frac{a^2}{4}.2\sin t\cos t.$$

Връщаме се към старата променлива $x=a\sin t$, откъдето определяме

$\sin t=\frac{x}{a};\left(-\frac{\pi}{2}\le t\le\frac{\pi}{2}\right)$ и намираме $t=\arcsin\frac{x}{a}$. Заместваме

$t=\arcsin\frac{x}{a},\sin t=\frac{x}{a},\cos t=\sqrt{1-\sin^2 t}=\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}}=\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}$ в намерения израз за J и

получаваме $J=\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+\frac{a^2}{2}\frac{x}{a}\frac{1}{a}\sqrt{a^2-x^2}+C$. Или

$\int\sqrt{a^2-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{a^2-x^2}+\frac{a^2}{2}\arcsin\frac{x}{a}+C.$

5. $J=\int\frac{1+\sin x\sqrt{4-x^2}}{\sin x}dx$.

Решение: Разделяме почленно подинтегралната функция

$J=\int\frac{1}{\sin x}dx+\int\sqrt{4-x^2}dx=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\int\sqrt{4-x^2}dx.$ Полагаме $\int\sqrt{4-x^2}dx=J_1$, който решаваме по следния начин: Използваме табличния интеграл №19, където $a=2$.

$$J_1=\int\sqrt{4-x^2}dx=\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2\arcsin\frac{x}{2}+C\Rightarrow$$

Тогава:

$$\Rightarrow J=\ln\left|tg\frac{x}{2}\right|+\frac{x}{2}\sqrt{4-x^2}+2drc\sin\frac{x}{2}+C.$$

6. $J=\int\sqrt{2-3x^2}dx$.

Решение:

$J=\int\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}dx=\frac{1}{\sqrt{3}}\int\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}d\left(x\sqrt{3}\right)=$

$=\frac{1}{\sqrt{3}}\frac{x\sqrt{3}}{2}\sqrt{\left(\sqrt{2}\right)^2-\left(x\sqrt{3}\right)^2}+\frac{\left(\sqrt{2}\right)^2}{2}\arcsin\frac{x\sqrt{3}}{\sqrt{2}}+C=\frac{x}{2}\sqrt{2-3x^2}+\frac{1}{\sqrt{3}}\arcsin x\sqrt{\frac{3}{2}}+C.$

*Използвахме табличен интеграл №19.

7. $J=\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}$.

Решение: Полагаме (използваме субституцията) $\sqrt{x^2+a^2}=t-x$ (субституция ня Ойлер). Следователно Заместваме тези изрази в дадения интегрел и получаваме

$J=\int\frac{\frac{t^2+a^2}{2t^2}}{\frac{t^2+a^2}{2t}}dt=\int\frac{dt}{t}=\ln|t|+C.$ От субституцията намираме, че $t=\sqrt{x^2+a^2}+x$. Тогава

$\int\frac{dx}{\sqrt{x^2+a^2}}=\ln\left|x+\sqrt{x^2+a^2}\right|+C.$

Интегриране чрез заместване (субституция) – задачи

По метода на субституциите решете следните интеграли:

1. $\int x\sqrt{x-2}dx.$;
2. $\int(x-1)\sqrt{x+1}dx$;
3. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x}}$;
4. $\int\frac{\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}dx$;
5. $\int\frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx$;
6. $\int\frac{dx}{1+\sqrt{x+1}}$;
7. $\int e^{\sqrt{x}}\frac{dx}{\sqrt{x}}$;
8. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$;
9. $\int\frac{dx}{x+\sqrt{1+\ln x}}$;
10. $\int\frac{dx}{\sqrt{\left(x^2+a^2\right)^2}}$ (използвайте субституцията $x=atgt$);

отговорите са на следващата страница...

Отговори на теста по анализ I част – интегриране чрез заместване (субституция):

1. $\frac{2}{15}(3x+4)\sqrt{(x-2)^3}+C$;

2. $\frac{2}{15}(3x-7)\sqrt{(x+1)^3}+C$;

3. $2\left[\sqrt{x}-\ln\left|1+\sqrt{x}\right|\right]+C$;

4. $x-2\sqrt{x}+2\ln\left|1+\sqrt{x}\right|+C$;

5. $2\sin\sqrt{x}+C$;

6. $2\sqrt{x+1}-2\ln\left|1+\sqrt{x+1}\right|+C$;

7. $2e^{\sqrt{x}}+C$;

8. $\ln\left|\frac{\sqrt{1+e^x}-1}{\sqrt{1+e^x}+1}\right|+C$;

9. $\frac{2}{3}(-2+\ln x)\sqrt{1+\ln x}+C$;

10. $\frac{x}{a^2\sqrt{x^2+a^2}}+C$.

„Аналитична геометрия” – „интегриране по части”
на следващата страница...

Интегриране по части – теоретична част

Ако u и v са две диференцируеми функции на една независима променлива, то формулата $\int udv = uv - \int vdu$ се нарича формула на интегриране по части.

Сред най-често срещащите се приложения на метода за интегриране по-чести са случаите, при които в дадения интеграл подинтегралният израз е:

а) диференциал, съдържащ произведение;

б) диференциал, съдържащ логаритми;

в) диференциал, съдържащ обратни тригонометрични функции.

ПРИМЕРИ:

1. $\int x\sin xdx$.

Решение: В случая съгласно формулата за интегриране по части $u = x; dv = \sin xdx$.

Тогава: $\frac{du}{dx} = u' = (x)' \Rightarrow \frac{du}{dx} = 1 \Rightarrow du = dx$, а $v = \int \sin xdx = -\cos x$. Заместваме така намерените u, v, du и dv във формулата за интегриране по части и получаваме

$\int x\sin xdx = x(-\cos x) - \int(-\cos x)dx = -x\cos x + \int \cos xdx = -x\cos x + \sin x + C$;

2. $\int x\ln xdx$.

Решение: $u = \ln x$ и $dv = xdx$. Тогава: $du = \frac{1}{x}dx$, а $v = \int xdx = \frac{x^2}{2}$. Заместваме тези изрази във формулата и получаваме

$\int x\ln xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \int \frac{x^2}{2}.\frac{1}{x}dx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{1}{2}\int xdx = \frac{x^2}{2}\ln x - \frac{x^2}{4} + C$.

3. $\int x\cos 3xdx$.

Решение: Нека $u = x$, а $dv = \cos 3xdx$. Тогава: $du = dx$, а $v = \int \cos 3xdx = \frac{1}{3}\sin 3x$.

Заместваме въвформулата $\int udv = uv - \int vdu$ и получаваме:

$\int x\cos 3xdx = \frac{1}{3}x\sin 3x - \frac{1}{3}\int \sin 3xdx = \frac{x}{3}\sin 3x + \frac{1}{9}\cos 3x + C$.

4. $\int xarctgxdx$.

$$u = arctgx, dv = xdx \Rightarrow du = \frac{dx}{1+x^2}, v = \int xdx = \frac{x^2}{2} \Rightarrow$$

Решение: Нека $\int xarctgxdx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2}{x^2+1}dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int \frac{x^2+1-1}{x^2+1}dx =$

$$= \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}\int\left(1 - \frac{1}{x^2+1}\right)dx = \frac{x^2}{2}arctgx - \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}arctgx + C$$

При решаване на някои интеграли се налага формулата за интегриране по части да се прилага по няколко пъти.

5. $J=\int x^2e^x dx$.

Решение: Нека $u=x^2$, а $\begin{matrix} dv=e^x dx \Rightarrow du=2xdx, v=\int e^x dx=e^x \Rightarrow \\ \Rightarrow J=\int x^2e^x dx=x^2e^x-2\int xe^x dx \end{matrix}$

Полагаме $J_1=\int xe^x dx$ и използваме още веднъж формулата за интегриране по части, където $u=x$, а $dv=e^x dx$. Тогава: $du=dx$ и $v=\int e^x dx=e^x$. Или

$$J_1=\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=xe^x-e^x \Rightarrow \mathrm{J}=\mathrm{x}^2e^x-2\left(xe^x-e^x\right)+C \Rightarrow$$

$$J=x^2e^x-2xe^x+2e^x+C=e^x\left(x^2-2x+2\right)+C$$

При решаване на някои интеграли след повторно прилагане на формулата за интегриране по части се връщаме към изходния интеграл J и от така полученото уравнение спрямо J намираме търсения интеграл.

6. $\int e^x \sin x dx$.

Решение: полагаме $u=\sin x, dv=e^x dx$, откъдето намираме, че $du=\cos x dx$, а $v=\int e^x dx=e^x$ и като заместим във формулата, получаваме $J=e^x\sin x-\int e^x\cos x dx$.
Полагаме $J_1=\int e^x\cos x dx$, прилагаме още веднъж формулата за интегриране по части, като в случая $u=\cos x, dv=e^x dx$, а $\begin{matrix} du=-\sin x dx, v=e^x \Rightarrow J_1=\int e^x\cos x dx= \\ =e^x\cos x-\int e^x(-\sin x)dx=e^x\cos x+\int e^x\sin x dx \end{matrix}$ т.е. в края на решението на интеграла J_1 получихме интеграла

$$J \Rightarrow J=e^x\sin x-e^x\cos x-J \Rightarrow 2J=e^x\sin x-e^x\cos x.$$ Или $J=\dfrac{e^x}{2}(\sin x-\cos x)+C$.

Интегриране по части – задачи

Решете по части следните интеграли:

1. $\int x\cos x dx$.
2. $\int x3^x dx$.
3. $\int xe^{ax} dx$.
4. $\int \dfrac{x^2 dx}{e^x}$.
5. $\int xtg^2 x dx$.
6. $\int x^2e^{3x} dx$.
7. $\int \dfrac{xe^x}{(1+x)^3} dx$.

Фирма „Братя Лазарови” – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово” тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1” тел.: 879-40-49, офис „Лозенец” тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

8. $\int \sin x \cos 3x dx$.

9. $\int e^{nar \sin x} dx$.

10. $\dfrac{xe^{\arcsin x}}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

отговорите са на следващата страница...

Фирма „Братя Лазарови" – Уроци по Математика, адрес: София, жк. Дружба – 1, бл. 121
Гл. офис „Павлово" тел.: 856-76-71, офис „Дружба-1" тел.: 879-40-49, офис „Лозенец" тел.: 862-60-45
Мобилен: **0886 959 227**, **www.lazarovi.com**

Отговори на теста по анализ I част – интегриране по части:

1. $x\sin x+\cos x+C$.
2. $\dfrac{3^x}{\ln^2 3}\left(x\ln 3-1\right)+C$.
3. $\dfrac{e^{ax}}{a}\left(x-\dfrac{1}{a}\right)+C$.
4. $C-\dfrac{x^2+2x+2}{e^x}$.
5. $xtgx-\dfrac{x^2}{2}+\ln\left|\cos x\right|+C$.
6. $\dfrac{1}{3}e^{3x}\left(x^2-\dfrac{2}{3}x+\dfrac{2}{9}\right)+C$.
7. $\dfrac{e^x}{1+x}+C$.
8. $\dfrac{1}{8}\left(3\sin x\sin 3x+\cos x\cos 3x\right)+C$.
9. $\dfrac{e^{n\arcsin x}}{1+n^2}\left(x+n\sqrt{1-x^2}\right)+C$.
10. $\dfrac{1}{2}\left(x-\sqrt{1-x^2}\right)e^{\arcsin x}+C$.

Сваляйте безплатно новите броеве на списание „ВАРИАНТИ” на адрес:
http://www.lazarovi.com/online-baza/
Успех!

Уважаеми читатели, съдържанието на това списание е съобразено с програмата на МОН, но главната му цел е да подпомогне обучението на учениците на фирма „Братя Лазарови”. Фирмата има специализирана методика на преподаване, която включва материал по математика с повишена трудност, който се изучава в следващия клас в училище.